

Практикалық сабақ №1

Тақырыбы: Көп айнымалы функциялар. Функцияның шегі және үзіліссіздігі.

Мақсаты: Функцияның анықталу облысын және шегін табу. Функцияны үзіліссіздікке және бірқалыпты үзіліссіздікке зерттеу.

1 - есен. Берілген функциялардың анықталу облыстарын табыңыз:

1) $z = x^2 + y^2$; 2) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; 3) $z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$;

4) $z = \arcsin \frac{x}{a} + \arcsin \frac{y}{b}$

Шеуі: 1) Мына формула $z = x^2 + y^2$ барлық (x, y) қос мәндері үшін функцияны анықтайды.

2) Мына $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ формула тек қана $x^2 + y^2 \leq 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын x пен y мәндерде функцияны анықтайды.

3) Мына $z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ формула $x^2 + y^2 < 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын (x, y) қос мәндерінде функцияны анықтайды.

4) $z = \arcsin \frac{x}{a} + \arcsin \frac{y}{b}$ формула $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын (x, y) қос мәндерінде ғана функцияны анықтайды.

2 - есен. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right)$ және $\lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right)$ табу керек, егер:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, \quad a = \infty, \quad b = \infty.$$

Шеуі: $x \neq 0, y \neq 0$ болғанда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{y^2} + 1}{\frac{x^2}{y^2} + y^2} \right) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} \right) = \lim_{y \rightarrow \infty} 1 = 1 \text{ аламыз.}$$

3 - есен. $\lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$ шекті табу керек.

Шеуі: $x^2 - xy + y^2 \geq xy$ теңсіздікті қолданып, $(x \neq 0, y \neq 0)$ болғанда аламыз

$$0 \leq \left| \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \right| \leq \left| \frac{x+y}{xy} \right| \leq \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|x|}.$$

Осыдан

$$0 \leq \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left| \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \right| \leq \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \right) = 0.$$

Сонымен, $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} = 0$.

4 - есеп. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ функцияның үзіліс нүктелерін табу керек.

Шешуі: x және y - тің көпмүшелігі болғандықтан $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ функциясы барлық x және y үшін үзіліссіз. Үзіліссіз функциялардың суперпозициясы үзіліссіз болатын теорема бойынша $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} - (0,0)$ нүктесінен өзге барлық x және y үшін үзіліссіз функция, осы нүктеде берілген бөлшектің бөлімі $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ нольге тең. Сондықтан, $(0,0)$ – шексіз үзіліс нүкте.

Аудиториялық жұмысы: Көп айнымалы функцияның анықтамасы. Функцияның анықталу облысын табу: [8] №№ 3136, 3138, 3143, 3146, 3148. Функцияның шегін табу. Функцияны үзіліссіздікке және бірқалыпты үзіліссіздікке зерттеу: [8] №№ 3176, 3181, 3184, 3185, 3187, 3189, 3191, 3194, 3196.

Үй жұмысы

№№ 3137, 3139, 3142, 3145, 3150, №№ 3182, 3186, 3188, 3190, 3192, 3195, 3199.